# Sistemas Lineares Determinados

Sistemas lineares podem ser representados na notação de multiplicação de matrizes:

No caso em que , obtém-se como coeficientes lineares uma matriz quadrada.

## Teorema de Gauss (escalonamento)

Para sistemas lineares com variáveis e equações independentes do ponto de vista linear, o sistema terá solução única. Isto acontece quando

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |
|  |  |

Vamos verificar se este sistema tem solução única, isto é, se ele atende à condição .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

Vamos resolver este sistema por escalonamento. Para isto, efetue combinações lineares de equações para desaparecer com uma das três variáveis. Para desaparecer com a variável , vamos fazer a seguinte escolha:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

### Teorema de Cramer bidimensional

Vamos desaparecer com a variável .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

## Teorema de Cramer tridimensional

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |
|  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |
|  |
|  |  |  |  |
|  |
|  |
|  |  |  |  |
|  |
|  |

## Demonstração do teorema de Cramer tridimensional

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |
|  |  |

Vamos desaparecer com a variável .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Vamos desaparecer com a variável .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Obtivemos um sistema bidimensional

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Em notação matricial:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |

E que pode ser resolvido usando o teorema de Cramer.

Vamos calcular o denominador das frações que aparecem no teorema:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  | |
|  | | |
|  |  | |
|  |  | |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |

Vamos calcular os numeradores.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Conclusão: o termo pode ser cancelado nas frações:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Assim, define-se o determinante de uma matriz .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Método de Sarrus

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Com esta definição, os numeradores das frações correspondem aos seguintes determinantes:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A condição de existência de uma única solução é a de que o determinante da matriz de coeficientes seja diferente de zero.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

## Inversão de matrizes

No caso em que , obtém-se como coeficientes lineares uma matriz quadrada.

Para sistemas lineares com variáveis e equações independentes do ponto de vista linear, o sistema terá solução única. Isto acontece quando

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |